BT DESSINATEUR MAQUETTISTE

MATHÉMATIQUES

SESSION 2007

DURÉE : 2 heures

COEFFICIENT : 3

Matériel autorisé :

Calculatrice conformément à la circulaire N° 99-186 du 16/11/1999

Dès que le sujet vous est remis, assurez-vous qu'il est complet.
Le sujet comporte 3 pages numérotées de 1/3 à 3/3

Exercice (*8 points*)

Soit *f* la fonction polynôme définie sur **R** par $f(x) = -x^3 + x^2 + 10x + 8$.

1. Déterminer les réels *a*, *b* et *c* tels que pour tout réel *x*, $f(x) = (4 - x)(ax^2 + bx + c)$.

2. Résoudre dans **R** l'équation $f(x) = 0$.

3. *a.* Étudier le signe de $f(x)$ suivant les valeurs de *x*.

   b. En déduire les solutions dans **R** de l'inéquation $f(x) < 0$.

4. Résoudre dans **R** les équations :

   a. $8 + 10\ln x + (\ln x)^2 - (\ln x)^3 = 0$.

   b. $-e^{3x} + e^{2x} + 10e^x + 8 = 0$.

Problème (*12 points*)

Soit *f* la fonction définie sur l'intervalle $]-2;+\infty[$ par $f(x) = 3x - 4 - \dfrac{6}{x+2}$.

On note (C) la courbe représentative de la fonction *f* dans un repère un repère orthogonal $(O;\vec{i},\vec{j})$ d'unités 2 cm sur l'axe des abscisses et 0,5 cm sur l'axe des ordonnées.

1. *a.* Déterminer $\lim\limits_{x \to -2} f(x)$.

   b. Que peut-on en déduire pour la courbe (C) ?

2. *a.* Déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(-\dfrac{6}{x+2}\right)$.

   b. Que peut-on en déduire concernant la courbe (C) et la droite (d) d'équation $y = 3x - 4$?

   c. Déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

3. *a.* Soit f' la fonction dérivée de *f*. Déterminer $f'(x)$.

   b. Montrer que, pour tout *x* appartenant à l'intervalle $]-2;+\infty[$, $f'(x) > 0$.

   c. Que peut-on en déduire concernant les variations de la fonction *f* ?

4. Déterminer une équation de la tangente (T) à la courbe (C) au point d'abscisse 1.

5. *a.* Recopier et compléter le tableau de valeurs suivant (on donnera des valeurs décimales approchées à 10^{-1} près) :

x	$-1{,}5$	-1	0	1	2	3
$f(x)$						

   b. Représenter (C) , (d) et (T) dans le repère $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$.

6. *a.* Déterminer une primitive F de la fonction f sur $\left]-2;+\infty\right[$.

   b. Déterminer l'aire A, en cm^2, du domaine limité par l'axe des abscisses, la courbe (C) et les deux droites d'équations $x=2$ et $x=3$.
   Donner la valeur exacte puis une valeur approchée à 0,1 près de A.

BREVET DE TECHNICIEN
FORMULAIRE DE MATHÉMATIQUES

Ce formulaire concerne les brevets de technicien préparés en deux ans après la seconde de détermination.

I. ALGÈBRE

A. *SUITES ARITHMÉTIQUES, SUITES GÉOMÉTRIQUES*

Suites arithmétiques

Premier terme u_0 ; $u_{n+1} = u_n + a$; $u_n = u_0 + na$

$$1 + 2 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

Suites géométriques

Premier terme u_0 ; $u_{n+1} = b\,u_n$; $u_n = u_0 b^n$

Si $b \neq 1$, $S_n = 1 + b + b^2 + \ldots + b^n = \dfrac{1 - b^{n+1}}{1 - b}$

Si $b = 1$, $S_n = n + 1$

B. *IDENTITÉS REMARQUABLES*

$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$; $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

$a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$

C. *ÉQUATION DU SECOND DEGRÉ*

Soient a, b, c des nombres réels, $a \neq 0$, et $\Delta = b^2 - 4ac$.

L'équation $ax^2 + bx + c = 0$ admet :

- si $\Delta > 0$, deux solutions réelles

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

- si $\Delta = 0$, une solution réelle double

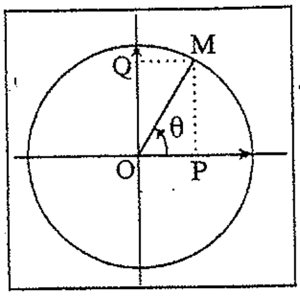
$$x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}$$

- si $\Delta < 0$, aucune solution réelle.

Si $\Delta \geq 0$, $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$,

$x_1 + x_2 = -\dfrac{b}{a}$, $x_1 x_2 = \dfrac{c}{a}$

D. *TRIGONOMÉTRIE*



$\overline{OP} = \cos\theta$

$\overline{OQ} = \sin\theta$

$\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$

$\tan\theta = \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$, $\theta \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi$

Valeurs remarquables

	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π
sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1
tan	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$		0

Formules d'addition

$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$

$\cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$

$\sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$

$\sin(a-b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b$

$\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a = 2\cos^2 a - 1 = 1 - 2\sin^2 a$

$\sin 2a = 2 \sin a \cos a$

$\cos^2 a = \frac{1}{2}(1 + \cos 2a)$; $\sin^2 a = \frac{1}{2}(1 - \cos 2a)$

II. ANALYSE

A. *PROPRIÉTÉS ALGÉBRIQUES DES FONCTIONS USUELLES*

1. Fonctions logarithme et exponentielle

$\ln 1 = 0$

$\ln e = 1$

$\ln ab = \ln a + \ln b$

$\ln \frac{a}{b} = \ln a - \ln b$

Si $x \in]-\infty, +\infty[$ et $y \in]0, +\infty[$,
$y = \exp x = e^x$ équivaut à $x = \ln y$

$e^0 = 1$

$e^{a+b} = e^a e^b$

$e^{a-b} = \frac{e^a}{e^b}$

$a^x = e^{x \ln a}$ $(a > 0)$

$(e^a)^b = e^{ab}$

$\ln a^x = x \ln a$

2. Fonctions puissances

$x^\alpha = e^{\alpha \ln x}$ $(x > 0)$

$x^0 = 1$

$x^{\alpha+\beta} = x^\alpha x^\beta$

$x^{\alpha-\beta} = \frac{x^\alpha}{x^\beta}$

$(x^\alpha)^\beta = x^{\alpha\beta}$

Si $n \in \mathbb{N}^*$, $x \in [0, +\infty[$ et $y \in [0, +\infty[$,
$y = \sqrt[n]{x}$ équivaut à $x = y^n$

B. *LIMITES USUELLES DE FONCTIONS*

Comportement à l'infini

$\lim_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$

$\lim_{x \to +\infty} e^x = +\infty$

$\lim_{x \to -\infty} e^x = 0$

Si $\alpha > 0$, $\lim_{x \to +\infty} x^\alpha = +\infty$; si $\alpha < 0$, $\lim_{x \to +\infty} x^\alpha = 0$

Comportement à l'origine

$\lim_{x \to 0} \ln x = -\infty$

Si $\alpha > 0$, $\lim_{x \to 0} x^\alpha = 0$; si $\alpha < 0$, $\lim_{x \to 0} x^\alpha = +\infty$

Croissances comparées à l'infini

$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$

$\lim_{x \to -\infty} x e^x = 0$

$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$

Si $\alpha > 0$, $\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^\alpha} = +\infty$

Si $\alpha > 0$, $\lim_{x \to +\infty} x^\alpha e^{-x} = 0$

Si $\alpha > 0$, $\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x^\alpha} = 0$

Comportement à l'origine de $\ln(1+x)$, e^x, $\sin x$

$\lim_{h \to 0} \frac{\ln(1+h)}{h} = 1$

$\lim_{h \to 0} \frac{e^h - 1}{h} = 1$

$\lim_{h \to 0} \frac{\sin h}{h} = 1$

C. *DÉRIVÉES ET PRIMITIVES* (Les formules ci-dessous peuvent servir à la fois pour calculer des dérivées et des primitives)

1. Dérivées et primitives des fonctions usuelles

$f(x)$	$f'(x)$	*Intervalle de validité*
k	0	$]-\infty,+\infty[$
x	1	$]-\infty,+\infty[$
$x^n,\ n\in\mathbb{N}^*$	nx^{n-1}	$]-\infty,+\infty[$
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$	$]-\infty,0[$ ou $]0,+\infty[$
$\frac{1}{x^n},\ n\in\mathbb{N}^*$	$-\frac{n}{x^{n+1}}$	$]-\infty,0[$ ou $]0,+\infty[$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$]0,+\infty[$
$x^\alpha,\ \alpha\in\mathbb{R}$	$\alpha x^{\alpha-1}$	$]0,+\infty[$
$\ln x$	$\frac{1}{x}$	$]0,+\infty[$
e^x	e^x	$]-\infty,+\infty[$
$\cos x$	$-\sin x$	$]-\infty,+\infty[$
$\sin x$	$\cos x$	$]-\infty,+\infty[$

2. Opérations sur les dérivées

$(f+g)' = f' + g'$

$(kf)' = kf'$

$(fg)' = f'g + fg'$

$\left(\frac{1}{f}\right)' = -\frac{f'}{f^2}$

$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$

$(g\circ f)' = (g'\circ f)f'$

$(e^u)' = e^u u'$

$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$, u à valeurs strictement positives

$(u^\alpha)' = \alpha u^{\alpha-1}u'$

D. *CALCUL INTÉGRAL*

Si F est une primitive de f, alors $\int_a^b f(t)\,dt = F(b) - F(a)$

Formule de Chasles

$$\int_a^c f(t)\,dt = \int_a^b f(t)\,dt + \int_b^c f(t)\,dt$$

$$\int_b^a f(t)\,dt = -\int_a^b f(t)\,dt$$

Linéarité

$$\int_a^b (\alpha f(t) + \beta g(t))\,dt = \alpha\int_a^b f(t)\,dt + \beta\int_a^b g(t)\,dt$$

Positivité

Si $a \leq b$ et $f \geq 0$, alors $\int_a^b f(t)\,dt \geq 0$

Intégration d'une inégalité

Si $a \leq b$ et $f \leq g$, alors $\int_a^b f(t)\,dt \leq \int_a^b g(t)\,dt$

Si $a \leq b$ et $m \leq f \leq M$, alors $m(b-a) \leq \int_a^b f(t)\,dt \leq M(b-a)$

Valeur moyenne de f *sur* $[a,b]$: $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\,dt$

E. *ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES*

Équation	Solutions sur $]-\infty,+\infty[$
$y' - ay = 0$	$f(x) = ke^{ax}$
$y'' + \omega^2 y = 0$	$f(x) = A\cos\omega x + B\sin\omega x$